9. Polinômios de Taylor

9.1 Definições

1) Seja f diferenciável em x_0, então existe reta tangente em $x = x_0$:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Temos $T_1(x_0) = f(x_0)$. Seja $R_1(x) = f(x) - T_1(x)$, assim

$$\lim_{x \to x_0} R_1(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] = 0.$$

Mostremos que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Logo, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x) = T_1(x) + R_1(x)$ e $\lim_{x \to x_0} \dfrac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$.

2) Seja f 2 vezes diferenciável em $x = x_0$. Vamos aproximar f por polinômio de grau 2 perto do x_0:

$$T_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2.$$

Seja $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$. Escolhemos A, B e C de tal modo que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{x - x_0} = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

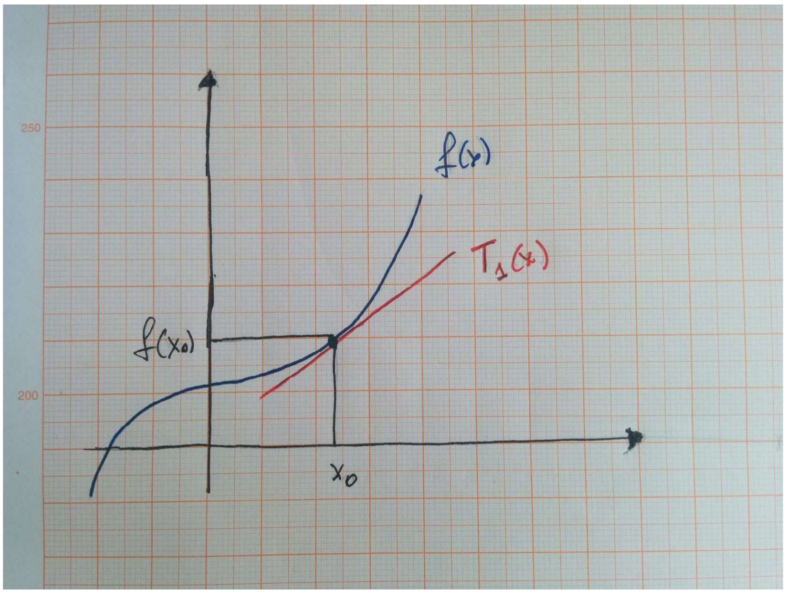

Figure 9.1: Reta tangente (primeira aproximação)

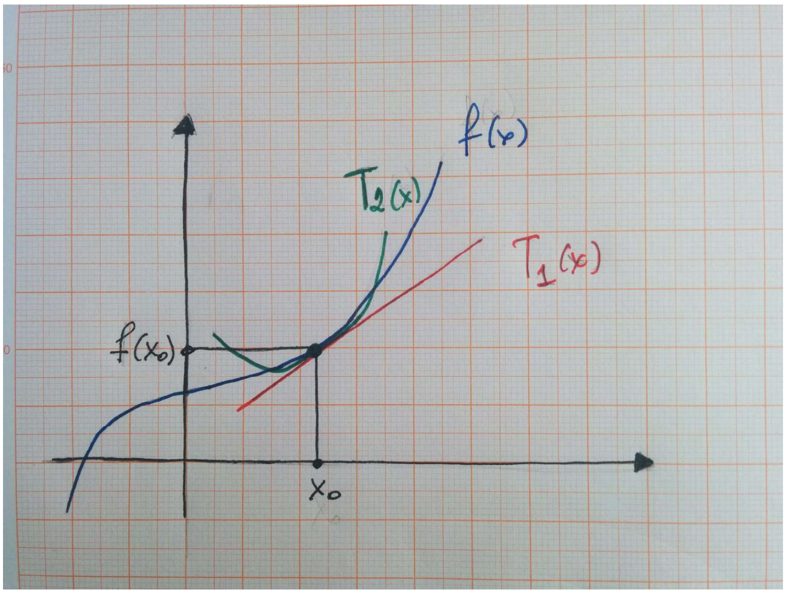

Figure 9.2: Segunda aproximação

Observe que a igualdade

$$\lim_{x\to x_0} R_2(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) - A - B(x-x_0) - C(x-x_0)^2] = 0$$

é equivalente a

$$A = f(x_0).$$

Por outro lado

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-B(x-x_0)-C(x-x_0)^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - B] = 0$$

é equivalente a

$$B = f'(x_0).$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-C(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \\
&= \lim_{x\to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} - C] = \text{pela Regra de L'Hôpital} \\
&= \lim_{x\to x_0} [\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} - C] = 0
\end{aligned}$$

se e somente se

$$C = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Portanto

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_x(x) = T_2(x) + R_2(x),$$

com $\lim_{x\to x_0} \dfrac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$.

Teorema 9.1.1 — de Taylor. Seja f uma função n-vezes diferenciavel em x_0. Então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x),$$

onde $\lim_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Definição 9.1.1 Seja f uma função n-vezes diferenciavel em x_0. O polinômio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!},$$

se chama *polinômio de Taylor de ordem* **n** *da função* **f** *em torno* $\mathbf{x_0}$.

■ **Exemplo 9.1** Ache $T_2(x)$ para $f(x) = \cos x$ em torno $x_0 = 0$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x, \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -\cos x, \Rightarrow f''(0) = -1. \end{aligned}$$

Assim $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ e $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$. ;-)

■ **Exemplo 9.2**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + R_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} + \frac{R_2(x)}{x^2} \right] = -\frac{1}{2}.$$

9.2 Séries de Taylor

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_x(x-x_0)^2 + \ldots$, em $(a-R, a+R)$. Procuremos c_n. Sabemos que $f(x)$ é derivável em $(a-R, a+R)$, portanto

$$\begin{aligned} & f(a) = c_0 \\ & f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots, \quad \Rightarrow f'(a) = c_1 \\ & f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3(x-a) + 3\cdot 4\cdot c_4(x-a)^2 + \ldots, \quad \Rightarrow f''(a) = 2c_2, \end{aligned}$$

contínuando, $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Teorema 9.2.1 Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ em $(a-R, a+R)$, então

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

ou seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Definição 9.2.1 Seja f infinitamente derivável em a. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é dita *uma série de Taylor de f em torno a.* Se $a=0$, a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ é dita *série de Maclaurin.*

Obs **[Unicidade de expansão de $f(x)$ em série]** Se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ e $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{c}_n(x-a)^n$, assim por Teorema 9.2.1

$$c_n=\tilde{c}_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Conclusão: se $f(x)$ está definida por uma série de potências, então essa série é a série de Taylor.

■ **Exemplo 9.3** Seja $f(x)=\arctan x$. Lembra que

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!},$$

em $[-1,1]$. Logo $f^{(2n)}(0)=0$ desde que $c_{2n}=0$. Além disso

$$\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

então $f^{(2n+1)}(0)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2n+1}=(-1)^n(2n)!$. Por exemplo, $f'(0)=1$, $f'''(0)=-2$.

■ **Exemplo 9.4** Seja $f(x)=\ln(1+x)$, logo

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!},$$

em $(-1,1)$. Assim

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

e $f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n}$, $n\geq 1$. Por exemplo, $f^{(4)}(0)=3!=6$.

Já vimos que se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ em $(a-R,a+R)$, então $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$. Observe que existe função $f(x)$ infinitamente derivavel tal que $f(x)\neq\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$. Por exemplo,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}.$$

Temos que $f^{(n)}(0) = 0$, portanto

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = 0.$$

■ **Exemplo 9.5** Ache a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $x_0 = 0$.

Solução.

$$f^{(n)}(x) = e^x, \rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1,$$

portanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Procuremos o raio de convergência $R = \frac{1}{l}$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = 0,$$

assim $R = \infty$ e $I = \mathbb{R}$. ;-)

Questão 1: $e^x \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $\mathbb{R}$.
Questão 2: Seja f de classe C^∞ em $x = a$. Quando

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \quad \text{em (a-R,a+R)?} \tag{9.1}$$

Pela definição da soma de uma série a igualdade (9.1) significa que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

para x fixo. Seja $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, assim

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_n(x)) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

se e somente se $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ em x. Portanto temos

Teorema 9.2.2 Seja f da classe C^∞ em $x = a$, logo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

para $x \in (a-R, a+R)$, se e somente se, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para $(a-R, a+R)$.

■ **Exemplo 9.6**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

Temos que $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = f(x) = e^{-\dfrac{1}{x^2}}$ não tende ao 0 se $n \to \infty$. Portanto a função f não coincide com a série de Taylor dela.